ISSN 1673 - 7644
中国科技核心期刊

山东建筑大学学报

Journal of Shandong Jianzhu University

Vol.31 Oct.
2016/10
2016

中国 济南
Jinan China

教学研究

工程实践

行列式计算的典型方法

王春晓
（山东建筑大学 理学院，山东 济南 250101）

摘要：行列式的概念和计算在线性代数课程中具有重要的基础作用，为后续内容的开展提供了重要的方法指导和工具支持，例如求解方程组、判断矩阵可逆或是线性相关性，都要涉及到行列式。基于行列式的定义与性质，归纳总结了常见的行列式的计算方法，并对每种方法可能的推广进行了分析，结合分析给出了示例型题目的求解。
关键词：基础数学；行列式；线性代数
中图分类号：0151 **文献标识码**：

The typical method of the determinant computation

WANG Chunxiao
(School of science, Shandong Jianzhu University, Jinan 250101, China)

Abstract: The determinant is an important concept in linear algebra. The determinant proposes an important tool and method to others knowledge in linear algebra, such as the solutions of systems of equations, inverses of matrices and relativity of vector group. This paper gives a summary of the computation of the determinant, based on the definition and the character of the determinant. Moreover, this paper also extends each method by some sample type examples.
Key words: fundamental mathematics ; determinant; linear algebra

0 引言

线性代数是一门重要的大学数学课程[1-7]，对工科大学生数学基础素质的培养具有举足轻重的作用。不过，由于线性代数所含知识模块的抽象性给教师的课堂教学及学生的学习带来难度。合理整合知识模块，归纳解题方法与技巧有助于提升对相关知识的理解和掌握。

行列式是线性代数中重要的知识模块，同时又是后续知识模块的重要基础。行列式知识模块的理解和掌握集中体现在行列式的计算环节。不过由于行列式的计算方法分散、技巧性较强，且解题方法不固定、不统一，导致行列式计算成为学生掌握的难点。如何提炼行列式的解题技巧与方法，发现行列式计算的规律性和逻辑性，是该知识模块重要的教学研究内容。

本文从行列式的定义、性质及特殊行列式出发，给出了行列式计算的六种经典方法，分析各种方法可能的推广，并探究了各种方法间可能的关联，使得行列式的计算成为有机的整体，提高了该知识模块的关联性和逻辑性。

1 关于行列式的概念

本节介绍本文所需的基础知识：行列式的定义、特殊行列式及行列式与矩阵的关系等。

1.1 定义

设 $A=(a_{ij})$ 是数域 F 的 $n\times n$ 阶矩阵，规定 A 的行列式 $|A|=\sum\limits_{i_1,\cdots,i_n}(-1)^{\tau(i_1,\cdots,i_n)}a_{1i_1}\cdots a_{ni_n}$，（也可定义为 $|A|=\sum\limits_{i_1,\cdots,i_n}(-1)^{\tau(i_1,\cdots,i_n)}a_{i_11}\cdots a_{i_nn}$，或 $|A|=\sum\limits_{i_1,\cdots,i_n,j_1,\cdots j_n}(-1)^{\tau(i_1,\cdots,i_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$）。

1.2 行列式常用公式

1.2.1 Vandermonde（范德蒙）行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$$

1.2.2 设 A,B 分为 n 阶和 m 阶方阵，则

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & D \\ 0 & B \end{vmatrix}=|A|\,|B|,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} D & A \\ B & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A|\,|B|$$

1.2.3 设A,B为n阶方阵,则$|AB|=|A||B|$

1.2.4 行列式第一降阶定理(Sturm 定理)

设 A,D 分别为 n 阶和 m 阶方阵,则,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=\begin{cases} |A||D-CA^{-1}B|,(\text{当}A\text{可逆时}) \\ |D||A-BD^{-1}C|,(\text{当}D\text{可逆时}) \end{cases}。$$

1.2.5 行列式第二降阶定理

设A,D分别为n阶和m阶可逆方阵,设B,C分别为$n\times m$和$m\times n$阶矩阵,则

$$|D-CA^{-1}B|=\frac{|D|}{|A|}|A-BD^{-1}C|。$$

1.2.6 行列式第三降阶定理

设A,B,C,D分别均为n阶方阵,且$AC=CA$,则$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|AD-CB|$。

2 行列式的计算

行列式的计算方法有很多,这些方法表现形式不一,不过其核心思路是化繁为简,将行列式尽可能简化为更简单、更特殊的行列式。这就需要灵活利用行列式的定义与性质。以下通过典型例题总结行列式的六种典型方法。

2.1 定义法

例 1. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$,且$a_{ij}(x)$均可导,证明:

$$f'(x)=\begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \cdots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & \cdots & a'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{1n}(x) & a'_{2n}(x) & \cdots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

证:$\because f(x)=\sum\limits_{i_1,\cdots,i_n}(-1)^{\tau(i_1,\cdots,i_n)}a_{1i_1}\cdots a_{ni_n}$

$\therefore f'(x)=\sum\limits_{i_1,\cdots,i_n}(-1)^{\tau(i_1,\cdots,i_n)}[a'_{1i_1}(x)a_{2i_2}(x)\cdots a_{ni_n}(x)+a_{1i_1}(x)a'_{2i_2}(x)\cdots a_{ni_n}(x)+\cdots+a_{1i_1}(x)a_{2i_2}(x)\cdots a'_{ni_n}(x)]$ $=$

$$\begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & \cdots & a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & \cdots & a'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{1n}(x) & a'_{2n}(x) & \cdots & a'_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

2.2 利用范德蒙公式求解行列式

范德蒙行列式是一类重要的特殊行列式,在行列式的计算中具有重要作用,将一个一般的行列式化为范德蒙行列式是计算行列式的一类重要方法。

例 2 证明 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$

证:令

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}$$

按最后一列展开$A_{15}+A_{25}x+A_{35}x^2+A_{45}x^3+A_{55}x^4$,

则,$D=-A_{45}=M_{45}$. 由范德蒙行列式公式,设

$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$,

A_{45} 为 $f(x)$ 中 x^3 的系数,即

$A_{45}=-(a+b+c+d)(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$,

即,$D=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$。

注 1:例 2 若不用范德蒙公式也可以求解出行列式的值,但不易化为七个因子相乘的形式。

注 2:此法适合于范德蒙行列式缺一行的情况,如:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix},\text{或}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}。$$

2.3 利用行列式性质

充分利用行列式的性质能够帮助我们找到解题思路,简化计算过程。

例 3. 证明

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0。$$

证：
$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

第一列乘(−1)加到其他各列
$$\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix}$$
$$\xlongequal[c_4-3c_2]{c_3-c_2} \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & 2a+3 & 6a+9 \\ b^2 & (b+1)^2 & 2b+3 & 6b+9 \\ c^2 & (c+1)^2 & 2c+3 & 6c+9 \\ d^2 & (d+1)^2 & 2d+3 & 6d+9 \end{vmatrix} = 0$$

注 3：单单为了证明原行列式为 0，其实一步即可，即：
$$原式 \xlongequal[c_4-3c_2]{c_3-c_2} \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & 2a+3 & 6a+9 \\ b^2 & (b+1)^2 & 2b+3 & 6b+9 \\ c^2 & (c+1)^2 & 2c+3 & 6c+9 \\ d^2 & (d+1)^2 & 2d+3 & 6d+9 \end{vmatrix} =$$
0（后两列成比例）。

注 4：若把行列式改为
$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+l_1)^2 & (a+l_2)^2 & (a+l_3)^2 \\ b^2 & (b+l_1)^2 & (b+l_2)^2 & (b+l_3)^2 \\ c^2 & (c+l_1)^2 & (c+l_2)^2 & (c+l_3)^2 \\ d^2 & (d+l_1)^2 & (d+l_2)^2 & (d+l_3)^2 \end{vmatrix} 是否仍为 0?$$
其中 $l_i(i=1,2,3)$ 为任意实数。由上面的计算过程可以看出结论成立。

注 5：若把上式中的平方改为立方，是否仍为零？不成立！原因是得不到两列常数。若改为立方，行列式再相应增加阶数即可。即
$$\begin{vmatrix} a^3 & (a+l_1)^3 & (a+l_2)^3 & (a+l_3)^3 & (a+l_4)^3 \\ b^3 & (b+l_1)^3 & (b+l_2)^3 & (b+l_3)^3 & (b+l_4)^3 \\ c^3 & (c+l_1)^3 & (c+l_2)^3 & (c+l_3)^3 & (c+l_4)^3 \\ d^3 & (d+l_1)^3 & (d+l_2)^3 & (d+l_3)^3 & (d+l_4)^3 \\ e^3 & (e+l_1)^3 & (e+l_2)^3 & (e+l_3)^3 & (e+l_4)^3 \end{vmatrix} = 0。$$

而且不仅如此，此题中的次方可以改为任意正整数 m. 只要行列式的阶数 n 满足 $n \geq m+2$ 即可。

例 4. 计算
$$D = \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$$

解：
$$D = \begin{vmatrix} x+\sum\limits_{i=1}^{n} a_i & a_2 & \cdots & a_n \\ x+\sum\limits_{i=1}^{n} a_i & x+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x+\sum\limits_{i=1}^{n} a_i & a_2 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix} (c_1$$
$+c_i, i=2,\cdots,n)$
$$= (x+\sum_{i=1}^{n} a_i) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$$
$$= (x+\sum_{i=1}^{n} a_i) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix} = (x+$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i) x^{n-1}$$

注 6：若行列式每行之和都相等，即可把各列加到第一列上，提出公因式简化计算。
$$如：设 f(x) = \begin{vmatrix} x & b & c & d \\ b & x & c & d \\ b & c & x & d \\ b & c & d & x \end{vmatrix}，则 f(x)=0 的$$
4 个根分别是：b，c，d，$-(b+c+d)$。

2.4 镶边法

镶边法看似把一个行列式变得更加复杂了，与行列式计算的原则背道而驰，事实上却是“以退为进，曲径通幽”，最终依然是达到简化行列式的目的。

$$例 5. D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} (a_i$$
$\neq 0, i=1,2,\cdots,n)$
$$解：D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal{r_i-r_1}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= (1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})a_1a_2\cdots a_n$$

注 7：若 $a_k = 0$，则 $D_n = a_1\cdots a_{k-1}a_{k+1}\cdots a_n$. 若有两个或者两个以上 $a_i = 0$，则 $D_n = 0$。

注 8：本题也可以不用镶边法。另解：

$$D_n = a_1a_2\cdots a_n \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 1 & 1+\frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 1+\frac{1}{a_n} \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1})\text{。}$$

注 9：有时为了简化计算还需镶两次边，虽然表面上看是越来越复杂了，实际上简化了计算。

例 6. 计算

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解：将 D 镶边为：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ 0 & a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underline{r_i-r_1} \begin{vmatrix} -1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

再将 $n+1$ 阶行列式镶边为 $n+2$ 阶行列式。

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

$$\underline{c_i-c_1(i=3,\cdots n)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\frac{n}{2} & \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & 1-\frac{n}{2} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}$$

$$= (^-2)\,n-2a_1a_2\cdots a_n[(^2-n)2-(\sum_{i=1}^{n}a_i)(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})]$$

$$= (^-2)\,n-2a_1a_2\cdots a_n[(^2-n)2-(\sum_{i=1}^{n}a_i)(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{a_j}{a_i})]$$

2.5 递推公式

当行列式的形式过于复杂，无法通过简单的几步达到简化的理想效果时，层层推进的递推法，可以帮助我们明确题目规律，确定解题方向。

很多与 n 有关的行列式的计算都可用递推公式或者归纳法，但有时有较强的技巧性。

例 7. 计算条形(或带形)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

即，只有主对角线及其相平行的两行有非零元素，其余均为零。

解：此例中若 $bc=0$，则显然 $D_n = a^n$。

若 $bc\neq 0$，将行列式按第一行做 Laplase 展开，设 $D_n = aD_{n-1}-bcD_{n-2}(n=3,\cdots)$　(＊)

显然，$D_1 = a$，$D_2 = a^2-bc$。

下面引进一个特殊的技巧来计算。

做二次三元式 $x^2-ax+bc=0$，它有两个根，设为 α,β。则 $\alpha+\beta = a$，$\alpha\beta = bc$。代入(＊)式，得

$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2})$

$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \beta D_{n-2})$

记 $E_n = D_n - \alpha D_{n-1}, F_n = D_n - \beta D_{n-1} (n = 3,4\cdots)$

则,

$E_n = \beta E_{n-1} = \cdots = \beta^{n-2} E_2 = \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1) = \beta^n$,

$F_n = \alpha F_{n-1} = \cdots = \alpha^{n-2} F_2 = \alpha^{n-2}(D_2 - \beta D_1) = \alpha^n$ $(n = 3,4\cdots)$

亦即 $D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^n, D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^n (n = 2, 3\cdots)$

当 $\alpha \neq \beta$ 时, $D_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$,

当 $\alpha = \beta$ 时, $D_n = \alpha D_{n-1} + \alpha^n = (n+1)\alpha^n = (n+1)\left(\dfrac{a}{2}\right)^n$ (也可由上式令 $\alpha \to \beta$ 得到)

$$综上: D_n = \begin{cases} \alpha^n, bc = 0 \\ (n+1)(\ )n, a^2 = 4bc \\ \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}, a^2 \neq 4bc \end{cases}$$

其中, $\alpha = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}$, $\beta = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}$。

例 8. 计算 n 阶行列式, $D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & c & a \end{vmatrix}$。

解:按第一列及第一行分别用两种方法拆分成两个行列式相加。

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-c & b & b & \cdots & b \\ 0 & a & b & \cdots & b \\ 0 & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c & c & c & a \end{vmatrix} = c(a-b)^{n-1} + (a-c)D_{n-1} \quad (**)$$

$$D_n = \begin{vmatrix} b & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & c & a \end{vmatrix} = b(a-c)^{n-1} - (a-b)D_{n-1} \quad (***)$$

由(**)及(***)可得

$(c-b)D_n = c(a-b)^n - b(a-c)^n$。

当 $b \neq c$ 时,可设 $D_n = \dfrac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}$

当 $b = c$ 时,可令 $c \to b$,取极限得, $D_n = [a + (n-1)b](a-b)^{n-1}$。

2.6 其他求行列式的方法

例 9. 设 $A = [a_{ij}]_{3\times3}$ 是非零矩阵,且满足 $a_{ij} = -A_{ij} (i,j = 1,2,3)$,其中 A_{ij} 为行列式 $|A|$ 中 a_{ij} 的代数余子式,求 $|A|$。

解: $\because a_{ij} = -A_{ij}$,故 $A^* = -A^T$,

又 $|A^*| = |A|^{n-1} = |A|^2$,而 $A^* = -A^T \Rightarrow |A^*| = -|A|$,

$\therefore |A|^2 = -|A| \Rightarrow |A|(|A| + 1) = 0$,

$\therefore |A| = 0$ 或 $|A| = -1$。

但是, $|A| = \sum\limits_{k=1}^{3} a_{ik}A_{ik} = -\sum\limits_{k=1}^{3} a_{ik}^2$, $(i = 1,2,3)$, $\therefore |A| = -\dfrac{1}{3}\sum\limits_{i,k=1}^{3} a_{ik}^2$, $(i = 1,2,3)$。而 a_{ik} 不全为零,因而 $|A| < 0$,故 $|A| = -1$。

3 结语

本文给出了行列式计算的一些经典方法及经典例题。由于行列式的计算技巧性较强,除本文所列方法外,还有很多其他方法可以用于行列式的计算,如数学归纳法等。不仅如此,行列式的各种解法间可以兼容,一个行列式可以有多种解题方法,这些方法适用行列式的程度不一,需要具体问题具体分析,选取恰当的方法以降低行列式计算的难度。

参考文献:

[1]А. Г. 库洛什. 高等代数教程[M]. 北京:人民教育出版社,第二版,1962.

[2]许以超. 代数学引论[M]. 上海:上海科学技术出版社,第一版,1966.

[3] 黄光谷,胡启旭,何晓亚. 考研数学题典[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2002.

[4] 北京大学数学力学系. 高等代数[M]. 北京:人民教育出版社,第一版,2002.

[5] 张禾瑞,郝鈵新. 高等代数[M]. 北京:高等教育出版社,第一版,1983.

[6] 谢邦杰. 线性代数[M]. 北京:高等教育出版社,第一版,1978.

[7] 普罗斯库列柯夫. 线性代数习题集[M]. 北京:人民教育出版社,第一版,1981.

[8] 张新功. 行列式的计算方法探讨[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版, 28(04):88-92,2011.